

# 函数程序代数理论进展与应用

孙永强

(上海交通大学计算机系)

**摘要** J. Backus<sup>[1]</sup>在1977年获得计算机科学图灵奖时发表的演说中,提出了一种新的函数语言——FP。它享有优美的代数性质,有助于程序的转换、优化和探求有关程序性质的一般定理。本文讨论了程序代数理论的进度,介绍在实际工作中的一些应用。

## 一、引言

J. Backus 在 1977 年获得计算机科学图灵奖的演说中<sup>[1]</sup>,提出了一种新的函数式语言——FP。FP 语言的主要特点在于在函数级上的运算,故而享有良好的代数性质。使用 FP 语言书写的程序非常简捷,易于论证,更重要的是可象在数学中一样,导出一些有关程序性质的一般定理。因此在编写程序时,人们就无需象过去一样一切得从头做起,这将有助于今后软件的质量和产量的提高,具有重要的理论和实际意义。

在程序设计方法学中,程序转换和优化占有重要的地位,特别是有很大的一类函数可以通过递归定义。这种定义方式显得简洁、自然,但是执行这类程序时效率很低。长期以来,计算机科学家致力于这种类型程序的转换和优化,已经获得不少有价值的结果。这些工作都是在对象级上进行的,J. Backus 首先提出了在函数级上的线性函数方程及其求解方法。J. H. Williams 继续他的工作,对一类“Overrun-tolerant”的非线性方程,得到相应的形式展开解,他们的工作为程序代数理论建立了良好的开端。

## 二、函数程序代数研究进展

自 1980 年以来,本研究小组即开始函数程序代数的研究。众所周知,论证递归程序的传统方法有结构归纳法和递归归纳法。利用函数程序代数方法论证递归程序的关键在于必须给出函数方程  $f = E(f)$  的展开式解:

$$f = p_0 \rightarrow q_0; \dots; p_n \rightarrow q_n; \dots$$

这种展开式解不仅给出了函数(即 FP 程序) $f$ 的一个分情况描述,因而有助于分析 $f$ 的行为和进行代数变换,而且提供了一种新的验证方法。我们注意到直接应用 Kleen 定理求解上述函数方程是不方便的,因而给出了一个较 Kleen 定理更适合于展开泛函  $E$  的方法<sup>[2]</sup>。其次,Backus 给出了很大一类线性泛函型,并且给出了相应线性函数方程的形式展开解,但是他的工作中忽视了某种条件,即我们后来称之为  $S$  限制。满足  $S$  限制的函数和谓词称为  $S$  限制的,由它们可构成  $S$  限制泛函型。和线性型一样, $S$  限制泛函型具有良好的代数性质,这些性质对于很大一类线性和非线性函数方程(组)的求解是十分重要的<sup>[2]</sup>。此外,Backus 在定义线性泛函型时,利用了谓词转换子。他所定义的谓词转换子,语义上具有二义性。我们提出用最

小谓词转换子定义单形线性泛函型<sup>[3]</sup>, 根据单形线性泛函型的定义, 对  $S$  限制泛函型作了补充和修改。

我们的展开式定理虽在一定程度上简化了函数方程(组)的求解, 然而直接利用这些定理求解方程仍然是十分麻烦的, 这就需要对函数方程(组)进行分类, 并根据其性质分别给出更有用的展开式定理。这些展开式定理应当能够象普通代数中的“根式解”一样, 直接给出函数方程(组)的形式解。在第一节中已经谈到 Backus 和 Williams 的工作, 在此基础上我们研究了称为“可约方程”和“冗余方程”的非线性方程, 并且给出了它们各自的形式解, 同时对一类线性方程组和非线性方程组求得了它们的形式展开解。

在前述一系列工作的基础上, 我们探讨了函数方程(组)展开解的机械算法, 定义了一类拟双线性方程, 它几乎包括了前面所研究过的各类非线性方程。使用这个算法已经证明过去所有有关非线性函数方程的定理<sup>[4, 5]</sup>。这部分工作的意义在于将求解方法在计算机上得以自动实现, 从而为程序的自动转换和优化创造了必要的条件。

国内外也有不少学者致力于这方面的研究。英国皇家理工学院 P. G. Harrison 教授用不同的方法研究了程序的展开、变换和优化。日本东京大学 Yoneda 教授和他的学生, 对我们的机械展开算法进一步简化和改进。南京大学计算机系朱鸿博士在他的博士论文中提出用数学中的函数系的方法去研究 FP 函数代数和展开定理。他首先定义了完备函数系和正交函数系等概念并证明了它们的一些主要性质; 其次, 利用这些性质就可进而讨论 FP 代数中的一些问题, 如程序代数的完备性, 函数展开的存在性、唯一性以及展开式的某些结构。叶志江在他最近的论文中建议把 Mills 提出的函数正确性模型和 Backus 的程序代数结合起来, 这样就保持了 Backus 函数程序代数的许多原有优点, 但在论证程序性质时更为有力和更易理解。

### 三、应用前景

如前所述, 函数程序代数将对程序验证、程序转换和优化带来重大的影响。例如英国皇家理工学院的 H. Khoshnevisan 和 K. M. Sephton 曾完成了一个函数求逆的自动化系统。他们通过编译将 Hope<sup>+</sup>语言的表达式编译为无变量的 FP 表达式, 然后求逆, 最后又变换到 Hope<sup>+</sup>, 在求逆过程中应用了 FP 语言的代数理论。一般而言, 在应用 FP 语言描述的问题中, 函数程序代数理论必然得到应用。笔者曾对脉动式阵列使用 FP 语言进行描述, 通过使用展开定理将函数进行展开, 从而得到正确性验证<sup>[6]</sup>。与原来方法比较, 这种方法更为简捷有效。本研究小组目前正在从事的另一研究工作是使用 FP 语言作为 VLSI 设计系统的描述语言, 在这个系统中正确性验证无需象一般系统那样需要另外处理。由于 FP 语言享有的代数性质和我们在处理时使用的变换规则, 保证了设计的正确性。

### 参 考 文 献

- [1] Backus J. W., Can programming be liberated from the Von-Neumann style? A functional style and its algebra of program, *comm. of ACM*, Vol.21 No.8, 1978, 613—641.
- [2] 叶志江, 孙永强, 函数方程(组)展开定理及  $S$  限制泛函型, 计算机学报, 第6卷, 第4期, 1983.
- [3] 孙永强, 叶志江, 黄仁龄, 单形线性泛函型, 计算机学报, 第11卷, 第6期, 1988.
- [4] 孙永强, 黄仁龄, 拟双线性方程的展开算法及其求解, 中国科学(A辑), 1, 1986.

- [5] Sun Yongqiang, Huang Renling, Deriving some expansion theorems for non-linear functional equations by an algorithm, *Science of computer programming*, 1, 1988.
- [6] Yongqiang Sun, Verification of Systolic Arrays: A FP Approach Tech. Report., Carnegie-Mellon Univ., 1986.

## DEVELOPMENTS AND APPLICATIONS OF THEORY OF FUNCTIONAL PROGRAM ALGEBRA

Sun Yongqiang

(Dept. of computer Science, Shanghai Jiao Tong University)

### Abstract

In his Turing Award lecture, J. Backus<sup>[1]</sup> proposed a functional programming language—FP. It enjoys nice algebraic properties. We can study program transformation, program optimization and investigate general theorems of program properties with help of it. In this paper, the developments of program algebra are discussed and some applications are introduced.

### 启 事

本刊自 1992 年开始, 交北京报刊发行局向全国发行。邮发代号为 82-413。定价不变。欢迎全国各科研单位、高等院校、有关部门及广大高级科研人员到当地邮局订阅。

逾期漏订的读者和查询《中国科学基金》创刊以来各期杂志的读者, 可与本刊编辑部联系。

《中国科学基金》编辑部新地址: 北京市海淀区花园北路 35 号东门(邮政编码: 100083)。电话: 201.6655-415。

本刊编辑部